

# Chapitre II

## Notion de Bifurcation, Analogie avec les Transitions de Phases

### Table des matières

<b>I.1 Bifurcations locales de codimension 1</b>	<b>I-1</b>
I.1.1 Bifurcation fourche (pitchfork) . . . . .	I-2
I.1.2 Bifurcation “nœud-col” . . . . .	I-3
I.1.3 Bifurcation transcritique . . . . .	I-3
I.1.4 Bifurcation imparfaite . . . . .	I-4
I.1.5 Bifurcation de HOPF . . . . .	I-4
I.1.6 L’oscillateur de VAN DER POL . . . . .	I-5
<b>I.2 Analogie avec les Transitions de Phases</b>	<b>I-5</b>
I.2.1 Le champ moléculaire . . . . .	I-5
I.2.2 Théorie à la LANDAU, cas d’un ferromagnétique . . . . .	I-6
I.2.3 Comportement critique . . . . .	I-6
I.2.4 Fluctuations critiques . . . . .	I-7
I.2.5 Au-delà la théorie de LANDAU . . . . .	I-7
I.2.6 Longueur de corrélation . . . . .	I-7
I.2.7 Comportement critique des bifurcations	I-8
<b>I.3 Exercices</b>	<b>I-8</b>
I.3.1 Sélection de structures . . . . .	I-8
Equation des rouleaux . . . . .	I-8
Sélection de structure carrée . . . . .	I-8
Sélection de structure hexagonales . . . . .	I-9

#### Résumé

Le comportement des systèmes non-linéaires dépend crucialement de leurs paramètres de contrôle. Avant de devenir chaotique, ces systèmes présentent des changements brutaux de comportement. On dit alors qu’une *bifurcation* se produit à chaque changement.

Bien que la séquence exacte de ces bifurcations soit propre à chaque système, le voisinage de toute bifurcation peut être décrit par un petit nombre de cas typiques,

car dans ces régimes, un seul terme non-linéaire gouverne l’évolution.

De plus ces bifurcations présentent de nombreuses similitudes avec les transitions de phases des systèmes thermodynamiques. Nous en ferons une étude comparative.

### II.1 Bifurcations locales de codimension 1

La théorie des bifurcations permet d’étudier les changements de stabilité d’un flot caractérisé par une application  $F_{\mu_i}(\vec{X})$ , lorsque les paramètres  $\mu_i$  varient et franchissent des valeurs critiques  $\mu_{ic}$  isolées (d’où le qualificatif de “locales” dans le titre). Les bifurcations sont répertoriées par leur *codimension*, qui est la plus petite dimension de l’espace de contrôle dans lequel la bifurcation peut exister.

Plaçons nous dans un espace des paramètres  $\mu_i$  à trois dimensions. La stabilité du système en question peut être affectée lorsque les paramètres franchissent une certaine variété  $\mathcal{S}$  de l’espace, définie par une relation entre les  $\mu_i$ . En toute généralité, cette variété est une surface dans l’espace des trois paramètres ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$ ). Sa codimension est égale à 1 : si nous déplaçons le système selon une droite quelconque  $\mathcal{D}$  (ou presque) de l’espace des paramètres, la bifurcation a lieu à l’intersection  $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ . Ainsi, si on fait varier un seul paramètre du système, on va rencontrer la bifurcation.

Si le changement de stabilité a lieu lorsqu’on coupe une courbe dans l’espace à trois paramètres, alors la codimension de la bifurcation est égale à 2. Pour rencontrer la bifurcation, il faut balayer une surface.

Il existe quatre types de bifurcations de codimension 1, qui correspondent toutes à des comportements génériques. La théorie des formes normales (que nous n’aborderons pas ici) montre que l’on peut toujours éliminer par changements de variables les termes non-linéaires non intéressants : ces termes sont dits non-résonnants. Ceci permet de ramener aux formes sui-

vantes.

### II.1.1 Bifurcation fourche (pitchfork)

Imaginons que nous plaçons verticalement une lame ressort et que nous attachons un plateau à son sommet. Cette lame est ramenée à sa position verticale ( $\theta = 0$ ) par une force de rappel élastique proportionnelle à  $\theta$ . Disposons une masse  $m$  sur le plateau et supposons de plus que l'ensemble soit placé dans un fluide très visqueux. Nous savons intuitivement que, si la masse est faible, la lame ressort va rester verticale, mais qu'elle va s'infléchir dès que la masse sur le plateau devient trop grande. Dans la limite où les frottements sont grands, on peut négliger les termes d'inertie et décrire ce phénomène par l'équation :

$$\gamma \dot{\theta} = -k\theta + mgl \sin \theta$$

Cette équation possède une solution stationnaire évidente  $\theta = 0$  et deux solutions non triviales. Pour les petits angles, on peut développer  $\sin \theta$  en puissance de  $\theta$ , ce qui conduit à une équation du type :

$$\dot{\theta} = \mu\theta - \frac{mgl}{6\gamma}\theta^3 + \dots \text{ avec } \mu = \frac{mgl - k}{\gamma}$$

Cette équation correspond à la *bifurcation fourche supercritique*.

**Supercriticité** Souvent les systèmes dynamiques respectent des symétries du type  $\pm x$  (dans le cas de la lame ressort  $\pm\theta$ ). Ceci correspond en général à une invariance particulière du système. Dans ce cas, la première linéarité à apparaître est cubique.

La forme normale de la bifurcation symétrique est :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (\text{II.1})$$

Revenons à la lame ressort. La notion de bifurcation explicite le changement de comportement observé en augmentant la masse posée sur le plateau : pour  $m < m_c$ , la lame ressort reste verticale, au delà de  $m > m_c$ , la lame fléchit du côté  $\theta > 0$  ou du côté  $\theta < 0$ . La notion de "fourche" traduit la possibilité de choix entre les deux types de solutions. La bifurcation fourche est réversible et continue. La courbe décrivant l'angle de déviation de la lame en fonction de  $m$  est identique selon qu'on augmente  $m$  ou qu'on le diminue : elle ne présente pas d'hystérésis. Par contre, il est possible que le système ne choisisse pas la même branche de la fourche entre deux montées consécutives de  $m$ .

Il est important d'étudier la stabilité des solutions stationnaires. Pour  $\mu$  négatif, on linéarise autour de  $x =$

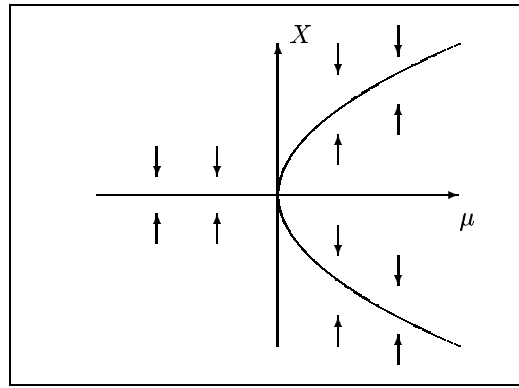


FIG. II.1: *Diagramme de la bifurcation fourche supercritique.*

0, on obtient ainsi  $\dot{x} = \mu x$ . Quelle que soit la condition initiale, elle tend vers  $x = 0, \dot{x} = 0$  avec une relaxation exponentielle  $x = x_0 \exp(\mu t)$ . Pour  $\mu > 0$ , il existe trois points fixes ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ), ( $x = \pm\sqrt{\mu}, \dot{x} = 0$ ). On obtient la stabilité en linéarisant autour de ces points fixes. Pour celui autour de  $x = 0$ , on a  $\dot{x} = \mu x$ , comme  $\mu$  est positif, toutes les conditions initiales voisines ont tendance à s'écartier, c'est un point fixe instable. Pour  $x = \pm\sqrt{\mu} + \epsilon$ , on obtient :  $\dot{x} = \mu(\sqrt{\mu} + \epsilon) - (\sqrt{\mu} + \epsilon)^3$ . Dans la limite de  $\epsilon \ll 1$  on a  $\dot{\epsilon} = -2\mu\epsilon$ . Ce sont donc des points fixes stables. Dans tous les cas le retour à l'équilibre se fait avec dynamique relaxionnelle dont le temps caractéristique est :

$$\begin{aligned} \tau &= -\mu^{-1} & \text{pour } \mu < 0 \\ \tau &= (2\mu)^{-1} & \text{pour } \mu > 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

La relaxation est très lente près du point de bifurcation ; nous verrons que ce phénomène est analogue au ralentissement critique dans les transitions de phases.

**Sous-criticité** Quelquefois, le terme cubique du développement de la forme normale est déstabilisant. Pour obtenir la saturation des solutions, il tenir compte des termes d'ordre supérieur comme le terme d'ordre 5.

La forme normale de la bifurcation sous-critique s'écrit :

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5 \quad (\text{II.3})$$

Les bifurcations décrites par ce type d'équation sont qualifiées de *sous-critiques* ou encore d'*inverses*. Evidement la solution triviale  $x = 0$  existe toujours ; elle est stable pour  $\mu < 0$  et se déstabilise à  $\mu \geq 0$ . Les solutions non-triviales se calculent aisément et correspondent aux racines de  $\mu + x^2 - x^4$ . Elles sont au nombre de quatre quand  $-1 < \mu < 0$  et de deux lorsque  $\mu \geq 0$ . En linéarisant autour de ces solutions, on peut déterminer leur stabilité. On montre ainsi que pour  $\mu > 0$ , les solutions non triviales sont stables. Dans la région  $-1/2 < \mu < 0$ , on notera que les solutions

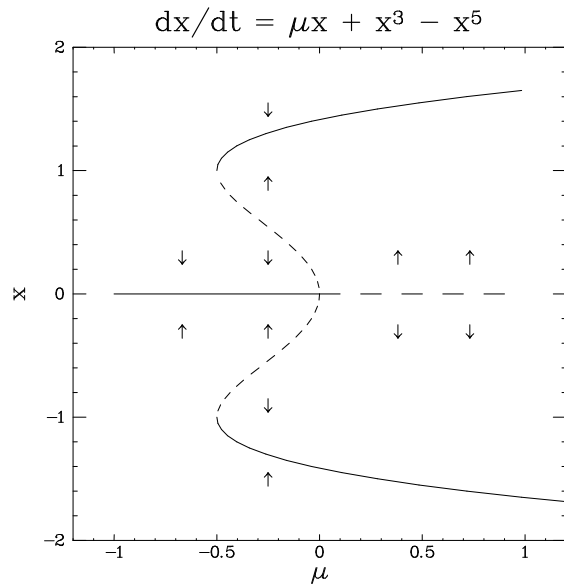


FIG. II.2: Diagramme de la bifurcation fourche sous-critique.

telles que  $x^2 = (1 + \sqrt{1 + \mu})/2$  sont stables; par contre, celles qui correspondent à  $(x^2 = 1 - \sqrt{1 + \mu})/2$  sont instables. Nous remarquons ainsi qu'il existe un domaine du paramètre  $-1/2 < \mu < 0$  dans lequel il y a coexistence de la solution triviale et des solutions qui ne le sont pas. Si  $\mu$  varie depuis  $\mu_0 < -1$  continûment vers  $\mu > 0$ , le système choisit d'abord la solution triviale et ne se déstabilise que pour  $\mu = 0$ ; là  $x$  prend brutalement une valeur finie. En reprenant la même procédure, mais en s'arrêtant à  $\mu = -1/2$ , nous obtenons la solution triviale qui est linéairement stable pour cette valeur du paramètre. Toutefois si notre système est soumis à une perturbation finie telle que  $x$  devienne plus grand, en valeur absolue, que la solution instable, le système se déstabilise et atteint la branche telle que  $x^2 = (1 + \sqrt{1 + \mu})/2$ . En opérant une rampe descendante sur le paramètre  $\mu$ , le système reste sur la branche  $x^2 = (1 + \sqrt{1 + \mu})/2$  jusqu'au moment où  $\mu = -1/2$ ; où le système effectue un saut brutal. Entre la montée et la descente, il apparaît donc un hystérésis dans le comportement du système, caractéristique des bifurcations sous-critiques.

### II.1.2 Bifurcation "nœud-col"

Forme normale :  $\dot{x} = \mu - x^2$  (II.4)

Les points critiques sont données par :  $x = \pm\sqrt{\mu}$  pour  $\mu > 0$  et aucun pour  $\mu < 0$ .

l'analyse de stabilité linéaire montre que :

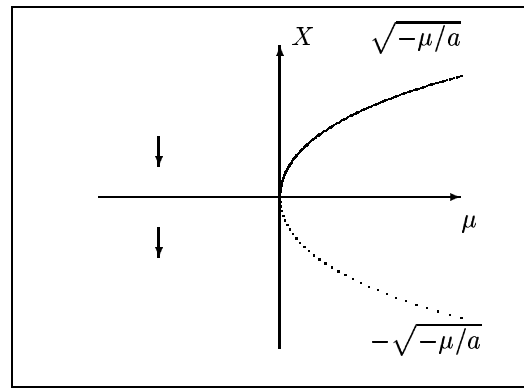


FIG. II.3: Diagramme de la bifurcation nœud-col

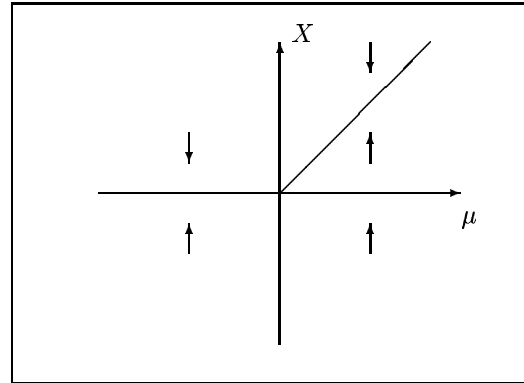


FIG. II.4: Diagramme de la bifurcation transcritique

$$\begin{cases} x_- = -\sqrt{\mu} & \text{est instable} \\ x_+ = \sqrt{\mu} & \text{est stable} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

### II.1.3 Bifurcation transcritique

Si le système ne possède pas la symétrie  $A \rightarrow -A$ , il n'y a pas de raison pour que le terme en  $A^2$  disparaisse et l'on a alors :

Forme normale :  $\dot{x} = \mu x - x^2$  (II.6)

Il apparaît deux solutions, la solution triviale  $x = 0$  et celle  $x = \mu$ . Il est facile de voir que la première est stable pour  $\mu < 0$  tandis que l'autre ne l'est pas. Cette situation s'inverse quand  $\mu > 0$ . On dit parfois qu'il y a eu "échange de stabilité", mais c'est une expression souvent utilisée pour d'autres concepts. Généralement un terme cubique vient s'ajouter à la forme normale :  $\dot{x} = \mu x - x^2 - x^3$ . Alors une bifurcation nœud-col apparaît en plus pour  $\mu < 0$ .

Si le système est fortement perturbé, c'est-à-dire soumis à des perturbations d'amplitudes finies, il y a possibilité d'hystérésis sur la branche du bas.

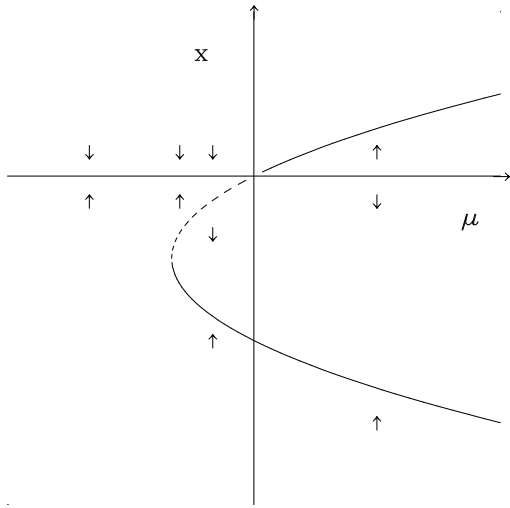


FIG. II.5: Diagramme de la bifurcation de  $\dot{x} = \mu x - x^2 - x^3$

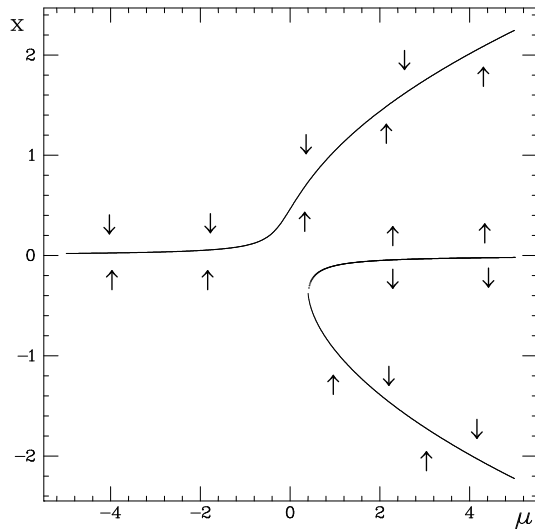


FIG. II.6: Diagramme de la bifurcation fourche imparfaite

La solution qui apparait pour  $\mu < 0$ , est appelée solution sous-critique car le système a perdu sa stabilité avant le seuil d'instabilité linéaire. Inversement la branche  $x > 0$ , est atteinte par une bifurcation super-critique, après le seuil d'instabilité linéaire.

### II.1.4 Bifurcation imparfaite

Bien souvent, les systèmes physiques présentent de petites imperfections qui vont différencier les solutions. La lame ressort ne sera jamais parfaitement verticale

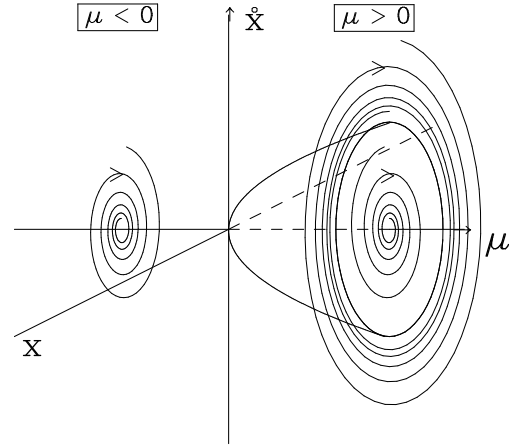


FIG. II.7: Diagramme de la bifurcation de HOPF

par exemple. On peut modéliser cet effet par une perturbation sur la forme normale qui devient :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + h \quad (\text{II.7})$$

La perturbation  $h$  va jouer un rôle décisif près du point de bifurcation. En effet, dans le cas de la lame ressort, au voisinage de la masse critique  $m_c$ , la raideur de la lame est compensée par la masse et le dispositif devient très sensible. Le fait de pencher légèrement d'un coté va favoriser ce coté et la dégénérescence qui existait entre les deux branches de la fourche est levée. Le diagramme de bifurcation a l'allure décrite sur la figure I.1.4.

### II.1.5 Bifurcation de HOPF

Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de HOPF donne naissance à des solutions oscillantes. L'espace des phases a maintenant deux composantes et la forme normale s'écrit dans le plan complexe :

$$\text{Forme normale : } \boxed{\dot{z} = \mu z - |z|^2 z} \quad (\text{II.8})$$

En posant  $\mu = \mu_r + i\mu_i$ , et  $z = x e^{i\theta}$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu_r x - x^3 \\ \dot{\theta} &= \mu_i \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse  $\mu_i$ .

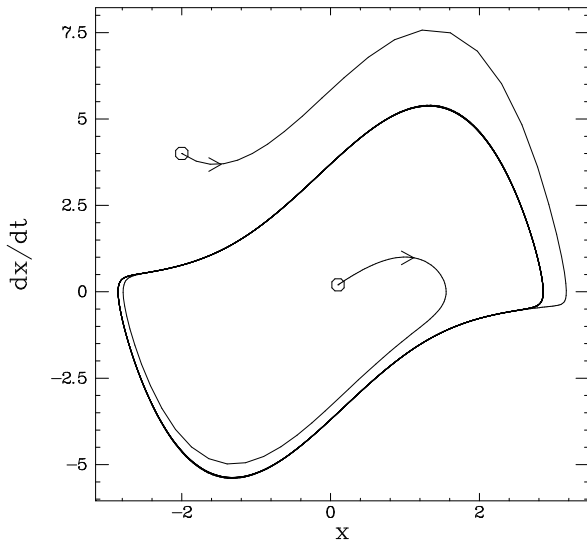


FIG. II.8: Espace des phases de l'oscillateur de Van der Pol. On remarquera l'existence d'un cycle limite

La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite.

Naturellement la bifurcation de HOPF peut être également sous-critique si le coefficient du terme  $|z|^2 z$  est de signe positif, il faut alors un terme négatif en  $|z|^4 z$  pour obtenir une saturation non-linéaire.

### II.1.6 L'oscillateur de VAN DER POL

L'oscillateur de VAN DER POL est un exemple de système donnant lieu à une bifurcation de HOPF. Il s'agit d'un oscillateur harmonique avec un terme d'amortissement non linéaire :

$$\begin{cases} du/dt = v \\ dv/dt = -u + (2\epsilon - u^2)v \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Lorsque  $u$  est petit, le terme d'amortissement est négatif ce qui conduit à une croissance d'une oscillation ; mais quand l'amplitude d'oscillation croît, le terme  $u^2$  conduit à un amortissement. Il résulte un cycle limite (une ellipse pour  $\epsilon \ll 1$ ) pour lequel le terme d'amortissement est nul.

## II.2 Analogie avec les Transitions de Phases

La glace et l'eau liquide sont deux phases bien connues d'un même corps. Le passage d'une phase à l'autre se

fait à une température bien définie ; cette transition est longtemps restée une énigme pour les physiciens. Sans en donner une explication complète, nous allons montrer l'analogie entre transitions de phases et bifurcations. Pour cela, introduisons un second exemple de transition de phase. A température ordinaire, un clou en fer est attiré par un aimant. Accrochons ce clou par un fil de cuivre et chauffons le au rouge : il n'est plus attiré par l'aimant tant qu'il reste suffisamment chaud ; en refroidissant il le redevient assez brutalement. Cette expérience illustre le caractère ferromagnétique du fer à basse température. A haute température, des mesures précises indiquent que le fer reste faiblement magnétique : on dit qu'il est paramagnétique. Le fer existe ainsi sous deux phases et transite de l'une à l'autre à  $T_c = 1043K$ .

La théorie des transitions de phases est née avec l'étude des matériaux magnétiques faite par CURIE. Il mesura l'aimantation des corps paramagnétiques (ou faiblement magnétiques) en fonction de la température et montra que la susceptibilité  $\chi = M/H$  où  $H$  est le champ appliqué, varie comme  $1/T$ . Il fit de même pour les matériaux ferromagnétiques. Ceux-ci présentent une aimantation spontanée lorsque  $T < T_c$  et se comportent comme des paramagnétiques pour  $T > T_c$ . CURIE montra que, dans ces conditions la susceptibilité suit une loi en  $1/(T - T_c)$  où  $T_c$  est la température de transition.

LANGEVIN proposa une théorie du paramagnétisme expliquant la loi en  $1/T$  par les arguments suivants : les dipôles magnétiques cherchent à s'aligner avec le champ mais cette tendance est combattue par les fluctuations thermiques qui les retournent de façon aléatoire. En utilisant la physique statistique, il put formuler l'expression de l'aimantation en fonction du champ et de la température. Cette théorie fait l'hypothèse que les dipôles sont isolés et conduit à l'expression de l'aimantation suivante :

$$M = N\mu\mathcal{L}(\mu H/k_B T) \quad (\text{II.11})$$

$N$  est le nombre de dipôles,  $H$  le champ appliqué et  $k_B$  la constante de BOLTZMANN et  $\mathcal{L}$  est la fonction de Langevin. Cette fonction est linéaire pour  $x$  petit et sature aux grandes valeurs de  $x$  ; son développement autour de  $x = 0$  est de la forme  $\mathcal{L}(x) \sim x/3 - x^3/45 + \dots$ . La théorie de LANGEVIN explique parfaitement le comportement des matériaux paramagnétiques connus.

### II.2.1 Le champ moléculaire

WEISS fit un pas décisif pour expliquer les matériaux ferromagnétiques, en proposant de décrire leurs dipôles magnétiques comme ceux des paramagnétiques mais en tenant compte de leurs interactions réciproques à l'aide d'un *champ moléculaire*. Ainsi l'aimantation moyenne du matériau prend la forme :

$$M = N\mu\mathcal{L}\left(\frac{\mu(H + H_m)}{k_B T}\right) \text{ avec } H_m = KM \quad (\text{II.12})$$

où  $H_m$  est le champ moléculaire. Celui-ci correspond au champ moyen de tous les dipôles voisins du site considéré. Il est supposé proportionnel à l'aimantation en un site soit  $H_m = KM$ . Nous voyons ainsi que l'aimantation des atomes voisins vient renforcer le champ magnétique appliqué, et par ce biais, s'amplifier elle-même. A basse température, la susceptibilité du matériau est grande, et cette auto-amplification s'emballle. Une aimantation apparaît sans qu'il soit nécessaire d'appliquer un champ : le matériau est ferromagnétique. A plus haute température, la susceptibilité décroît et l'emballement n'a plus lieu : le matériau devient paramagnétique. On peut calculer aisément cette température de transition en ne considérant que le premier terme du développement de la fonction de LANDAU :

$$M = N\mu \left[ \frac{\mu(H + KM)}{3k_B T} \right]$$

soit : 
$$M \left[ 1 - \frac{N\mu^2 K}{3k_B T} \right] = \frac{N\mu^2 H}{3k_B T} \quad (\text{II.13})$$

On obtient la divergence de la susceptibilité avec la température :

$$\chi = \left( \frac{N\mu^2}{3k_B} \right) \frac{1}{T - T_c} \text{ avec } T_c = \frac{KN\mu^2}{3k_B} \quad (\text{II.14})$$

Si nous écrivons l'équation qui régit l'aimantation en l'absence de champ magnétique ( $H = 0$ ) en poussant à l'ordre trois, nous retrouvons une expression d'une forme normale classique :

$$0 = \frac{T_c - T}{T} M - \left( \frac{N\mu^4 K^3}{45k_B^3 T^3} \right) M^3 \quad (\text{II.15})$$

Près de la transition  $T \rightarrow T_c$ , l'aimantation prend la forme :

$$M = M_0(T_c - T)^{1/2} \quad (\text{II.16})$$

## II.2.2 Théorie à la LANDAU, cas d'un ferromagnétique

LANDAU fit remarquer qu'il y avait une différence de symétrie entre la phase paramagnétique et la phase ferromagnétique : dans un cas, les dipôles sont ordonnés à grande distance, dans l'autre, cet ordre disparaît. Pour caractériser cette **brisure de symétrie**, il introduisit

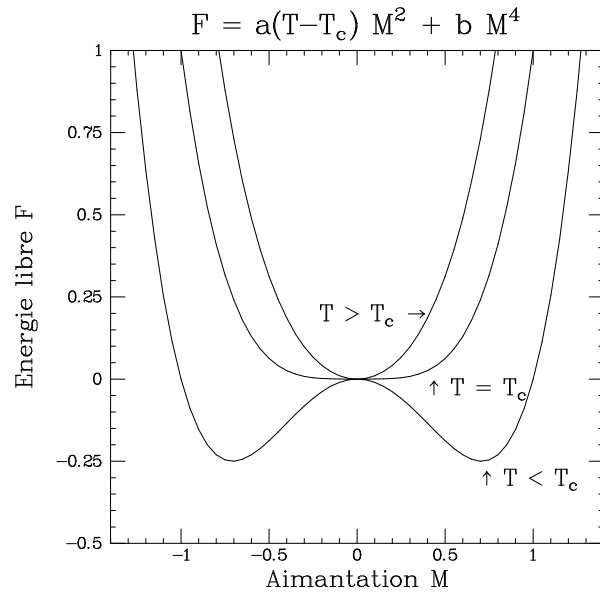


FIG. II.9: Evolution de l'énergie libre d'un ferromagnétique décrit par le modèle de LANDAU dans le cas d'une transition du second ordre.

la notion de paramètre d'ordre. Dans le cas du ferromagnétisme, il s'agit simplement de l'aimantation. En utilisant des arguments de symétrie, il proposa différentes formes type pour l'énergie libre  $F$  en fonction du paramètre d'ordre. Dans le cas du ferromagnétique :

$$F(T, M) = \frac{a}{2}(T - T_c)M^2 + \frac{b}{4}M^4 + \dots \quad (\text{II.17})$$

Un cristal ferromagnétique étant inchangé par la symétrie  $M \rightarrow -M$ , le développement de l'énergie libre ne comporte que des termes pairs. Nous avons reproduit l'allure de l'énergie libre de I.17 en fonction de la température sur la figure I.9.

L'aimantation du système évolue vers le minimum de l'énergie libre en suivant une dynamique gouvernée par l'équation phénoménologique :  $\tau_0 \frac{\partial F}{\partial t} \delta M = -\frac{dF}{dM} \delta M$  soit :

$$\tau_0 \frac{dM}{dt} = -a(T - T_c)M - bM^3 \quad (\text{II.18})$$

Nous retrouvons la forme obtenue dans le modèle du champ moléculaire ainsi que la forme normale associée à la bifurcation fourche.

## II.2.3 Comportement critique

Près d'un point de transition, différents systèmes physiques peuvent être décrits par l'expression de l'énergie libre proposée par LANDAU. Ils présentent ainsi

des comportements analogues. Ils sont caractérisés par des **exposants critiques**. A l'équilibre, le paramètre d'ordre  $\eta$  —l'aimantation pour un ferromagnétique— suit une loi de puissance de la forme :

$$\eta \sim (T_c - T)^\beta \text{ soit } M = M_0 \sqrt{T_c - T} \text{ pour } T < T_c \quad (\text{II.19})$$

De la même façon, près du point de transition, la dynamique du paramètre devient de plus en plus lente. C'est le *ralentissement critique*, caractérisé lui aussi par un exposant aisément trouvé dans le cas de l'équation dynamique de l'aimantation I.18.

$$\begin{aligned} \tau &\sim (T_c - T)^{-\gamma'} \quad \text{soit } \tau = \tau_0 (T_c - T)^{-1} \text{ pour } T < T_c \\ \tau &\sim (T_c - T)^{-\gamma} \quad \text{soit } \tau = \tau_0 (T_c - T)^{-1} \text{ pour } T > T_c \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Finalement, on peut aussi montrer que la capacité calorifique a un comportement critique :

$$\begin{aligned} C_v &\sim (T_c - T)^{-\alpha'} \quad \text{pour } T < T_c \\ C_v &\sim (T_c - T)^{-\alpha} \quad \text{pour } T > T_c \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Dans le cadre de la théorie de LANDAU, les exposants  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont tous deux nuls.

## II.2.4 Fluctuations critiques

Près du point critique, la susceptibilité diverge. Le système est donc très sensible et va amplifier toutes les perturbations qu'il subit. En particulier, les fluctuations d'origine thermodynamique vont subir une telle amplification qu'elles peuvent devenir visibles à l'échelle macroscopique. Ainsi près du point critique d'un gaz, on peut voir le phénomène d'opalescence critique où le fluide prend un aspect laiteux car les fluctuations de densité (et donc d'indice) sont très importantes.

## II.2.5 Au-delà la théorie de LANDAU

En réalité, la plupart des transitions de phases ne suivent pas la théorie de LANDAU, encore appelée *théorie de champ moyen*. Si elle rend compte qualitativement des phénomènes observés, elle n'est pas quantitative quant à la valeur des exposants critiques. Pour le ferromagnétique par exemple, les exposants  $\gamma$  vaut  $4/3$  et  $\beta = 1/3$  tandis que la théorie donne  $\beta = 1/2$  et  $\gamma = 1$ .

Cette différence provient du fait que la théorie de champ moyen néglige le rôle des fluctuations thermiques. Avec la technique de la renormalisation, KADANOFF et WILSON ont construit une théorie correcte des transitions de phases. Il est alors possible de définir des

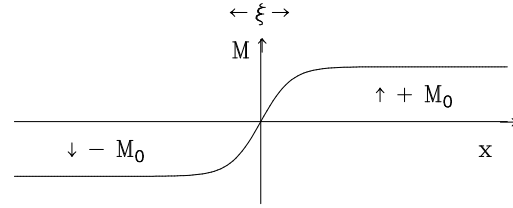


FIG. II.10: *Forme d'une paroi magnétique.*

classes de système qui permettent de regrouper différents types de systèmes ayant le même comportement critique et les mêmes exposants.

Cependant toutes les théories prédisent une règle de somme entre les exposants critiques, expérimentalement vérifiée :

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' = 2 \quad (\text{II.22})$$

## II.2.6 Longueur de corrélation

Bien souvent le paramètre d'ordre n'est pas homogène spatialement. C'est la raison pour laquelle un clou ferromagnétique ne présente pas d'aimantation macroscopique spontanée. Des domaines où l'aimantation prend des directions différentes apparaissent. Pour minimiser l'énergie magnétique, les différents domaines s'organisent afin de refermer les lignes de champ. L'aimantation globale est ainsi pratiquement nulle. Quand on applique un champ magnétique, la taille des différents domaines change : ceux qui sont parallèles au champ s'étendent au détriment de ceux qui lui sont antiparallèles ; une aimantation importante apparaît. Pour que les domaines puissent s'étendre, il faut que les parois qui les séparent se déplacent. Ces parois sont des régions dans lesquelles l'aimantation passe continûment d'une direction à une autre. Elles sont caractérisées par une épaisseur  $\xi$  généralement assez petites (de l'ordre de quelques distances inter-atomiques). Ces parois peuvent être accrochées par des défauts de structures comme des dislocations ou des impuretés. Dans le fer *doux*, très peu de défauts sont présents et les parois se déplacent presque librement. Si le fer contient beaucoup de défauts, le déplacement des parois est plus difficile et l'aimantation peut rester bloquée à une valeur non-nulle : nous avons alors un aimant.

Les parois qui séparent deux domaines magnétiques ont une épaisseur qui dépend de la température et qui présente aussi un comportement critique. Cette épaisseur peut être calculée à partir de l'expression de l'énergie libre dans laquelle on a ajouté un terme  $(\partial M / \partial x)^2$  qui rend compte des variations spatiales de l'aimantation :

$$F(T, M) = \frac{a}{2}(T - T_c)M^2 + \frac{e}{2} \left( \frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 + \frac{b}{4}M^4 + \dots \quad (\text{II.23})$$

Pour obtenir le profil d'une paroi, cherchons la fonction  $M(x)$  qui joint  $M = +M_0, \partial M/\partial x = 0$  quand  $x \rightarrow \infty$  et  $M = -M_0, \partial M/\partial x = 0$  quand  $x \rightarrow -\infty$ , avec  $M_0 = \sqrt{(T_c - T)a/b}$ . Nous pouvons ainsi estimer  $F$  :  $F = -(b/4)M_0^4$ . Ce profil obéit à l'équation :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \sqrt{\frac{b}{2e}}(M_0^2 - M^2) \quad (\text{II.24})$$

En intégrant on obtient :

$$M(x) = M_0 \text{th}(x/\xi) \text{ avec } \xi = \sqrt{\frac{2e}{a(T - T_c)}} \quad (\text{II.25})$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la longueur de corrélation. Elle diverge lorsque l'on approche du point critique avec l'exposant  $\beta$ , égal à  $1/2$  dans la théorie de LANDAU.

## II.2.7 Comportement critique des bifurcations

Les bifurcations présentent l'analogie du comportement critique avec des exposants correspondant au modèle de LANDAU. Ainsi près d'une bifurcation, on assiste à un ralentissement de la dynamique avec un temps caractéristique qui évolue comme  $\mu^{-1}$ , et la position d'équilibre obtenue pour la bifurcation fourche se comporte comme le paramètre d'ordre en  $\sqrt{\mu}$ . Finalement, si la bifurcation concerne un champ spatial, la longueur de corrélation de celui-ci diverge près de la transition.

## II.3 Exercices

### II.3.1 Sélection de structures

Nous nous proposons d'étudier la sélection des structures convectives de Rayleigh-Bénard. Suivant les conditions expérimentales, on peut observer des structures de types rouleaux, des carrés ou des hexagones. Nous allons voir que les termes non-linéaires sont responsables de cette sélection. Dans la première partie nous discuterons de l'équation modèle d'une structure de rouleaux. Dans la deuxième nous étudierons un modèle pouvant conduire à des carrés. La troisième partie correspond aux structures d'hexagones.

#### Equation des rouleaux

On propose de représenter un système de rouleaux par l'équation suivante :

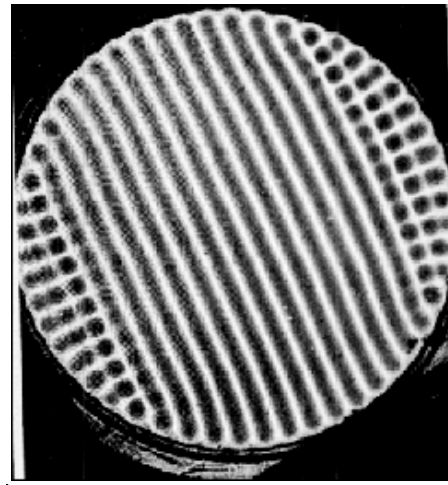


FIG. II.11: Structure de rouleaux observée par ombroscopie dans la convection

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - A^3 \quad (\text{II.26})$$

Sans faire de calcul indiquer :

- Que représente la variable  $A$  dans le cas de la convection ?
- Même question pour  $\epsilon$ .
- Proposer une méthode de mesure de  $\tau_0$ . (On suppose que l'on sait mesurer  $A$  et que l'on peut imposer  $\epsilon$ )

#### Sélection de structure carrée

Si les parois horizontales qui définissent la couche de fluide conduisent la chaleur beaucoup mieux que le fluide, les structures convectives sont de type "rouleaux". Au contraire, si le fluide conduit mieux la chaleur que les parois horizontales on observe une structure de type "carrés" correspondant à la superposition de deux structures de rouleaux perpendiculaires. Nous proposons de modéliser ce comportement par un jeu d'équations simples, montrer comment les non-linéarités peuvent conduire aux deux types de comportements décrits.

Pour décrire une structure de carrés ou de rouleaux, on propose d'utiliser :

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - (A^2 + \gamma B^2)A \\ \tau_0 \frac{\partial B}{\partial t} = \epsilon B - (B^2 + \gamma A^2)B \end{cases} \quad (\text{II.27})$$



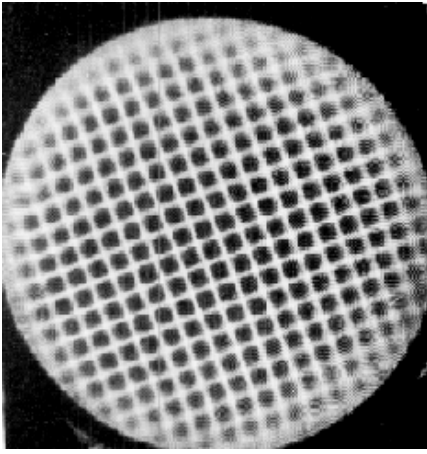


FIG. II.12: Structure de carré observée par ombroscopie dans la convection

où  $A$  caractérise un système de rouleaux et  $B$  celui qui lui est perpendiculaire.

- Combien de dimensions l'espace des phases possède-t-il ?
- Déterminer les points fixes de I.27, discuter en fonction de  $\epsilon$ .
- Pour les différents points fixes, déterminer leur stabilité en fonction de  $\gamma$ .
- Dessiner qualitativement les trajectoires dans l'espace des phases dans les différents cas de figure pour  $\epsilon > 0$ .
- Interpréter les observations décrites au moyen de ce modèle. Discuter le paramètre qui détermine la stabilité d'un type de structure et indiquer de quoi il dépend.

### Sélection de structure hexagonales

Quand la symétrie haut-bas est brisée, on peut observer des structures d'hexagones.

Pour décrire une structure d'hexagones ou de rouleaux, on propose d'utiliser :

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A + \beta BC - A^3 \\ \tau_0 \frac{\partial B}{\partial t} = \epsilon B + \beta AC - B^3 \\ \tau_0 \frac{\partial C}{\partial t} = \epsilon C + \beta AB - C^3 \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

où  $A$  caractérise un système de rouleaux,  $B$  un système de rouleaux à  $120^\circ$  et  $C$  un système à  $-120^\circ$ .

- Quelle est la dimension de l'espace des phases ?

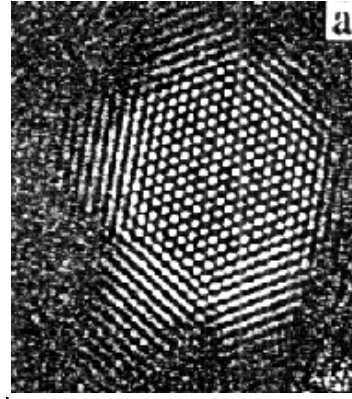


FIG. II.13: Structure d'hexagones

- Déterminer les points fixes de I.28, discuter en fonction de  $\epsilon$ . On s'intéressera aux solutions (I)  $A = B = C \neq 0$  et (II)  $A \neq 0, B = C = 0$ .
- Pour ces points fixes, déterminer leur stabilité en fonction de  $\epsilon$ .
- Dessiner qualitativement les trajectoires dans l'espace des phases dans les différents cas de figure.
- Quelle est la nature de la bifurcation observée pour la solution (I).
- Discuter les changements de comportement en fonction de  $\epsilon$ .

### Bibliographie

- [1] V. ARNOLD *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir.
- [2] KITTEL *Introduction à la Physique des Solides*, Ed. Dunod.
- [3] N. BOCCARA *Symétries Brisées*, Ed. Herman.
- [4] P. MANNEVILLE, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991).
- [5] H.G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989).